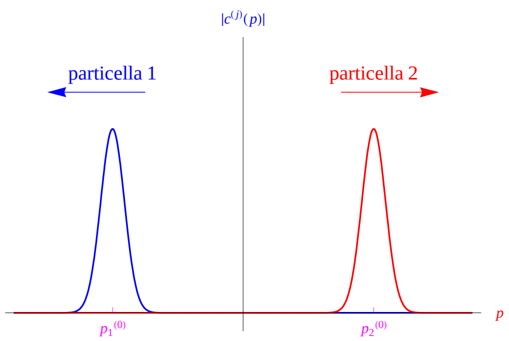
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Il paradosso EPR

(Entanglement quantistico (secondo Schroedinger))

Marcello Colozzo



Indice

1 Il realismo fisico

Albert Einstein non accettava l'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica (*interpretazione di Copenaghen*) in quanto tale paradigma aveva messo in discussione il *realismo fisico*, fondamentalmente basato sull'oggettività della realtà fisica. L'oggettività garantisce manifestamente l'indipendenza dei valori assunti da una grandezza fisica, dalle modalità osservative. Inoltre, una qualunque teoria fisica deve essere *coerente* o più precisamente *autoconsistente* dal punto di vista matematico e in accordo con i dati sperimentali. Per Einstein la meccanica quantistica era coerente e in perfetto accordo con gli esperimenti. Tuttavia, era necessario aggiungere un'ulteriore richiesta: la *completezza.* Mentre la coerenza equivale alla possibilità di rappresentare un ente fisico con un opportuno ente matematico (si pensi alle *osservabili quantistiche* rappresentate matematicamente da un operatore hermitiano definito in uno spazio di Hilbert), la completezza è garantita dal seguente criterio:

Criterio 1 *Ciascun elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.*

Questa richiesta appare ragionevole a patto di fornire una definizione operativa di ≪elemento di realtà≫. Con la collaborazione di due colleghi (**Podolsky** e **Rosen**) Einstein propose la seguente definizione:

Definizione 2 *Se si è in grado di misurare con certezza il valore di una grandezza fisica senza perturbare il sistema in istudio, allora esiste un* **elemento di realtà fisica** *corrispondente alla predetta grandezza.*

Ad esempio, in meccanica classica la quantità di moto di una particella è una grandezza fisica a cui corrisponde univocamente un elemento di realtà, in quanto tale grandezza può essere determinata senza perturbare significativamente il sistema.

Di contro, il principio di indeterminazione di Heisenberg impedisce una misura simultanea e di precisione infinita, della posizione e della quantità di moto di una particella. Ne segue che per Einstein-Podolsky-Rosen (EPR, da qui in poi) tale impossibilità si traduce nella incompletezza della meccanica quantistica. EPR realizzarono il seguente esperimento mentale: due particelle (1 e 2) si muovono di moto rettilineo uniforme l'una contro l'altra con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, come illustrato in fig. 1, dove le dimensioni sono dilatate per motivi didattici.

Schematizzando la collisione attraverso un urto normale centrale possiamo scrivere i moduli delle velocità di singola particella, dopo l'urto:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ V_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Incidentalmente, per il principio di conservazione della quantità di moto (da cui derivano le predette equazioni) si ha con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{ini} = \mathbf{p}_{fin} \tag{2}$$

dove

$$\mathbf{p}_{ini} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{p}_{fin} = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 \tag{3}$$

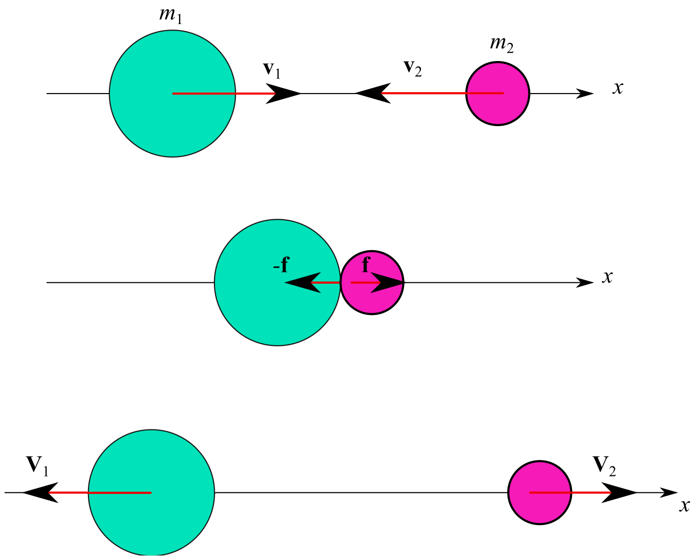


Figura 1: Urto normale centrale di due particelle.

Il principio di indeterminazione vieta la misura simultanea delle quantità di moto di singola particella e la corrispondente posizione, però consente la misura simultanea della quantità di moto totale $\mathbf{p}$ e della coordinata relativa $x = x_1 - x_2$. Ne segue che misurando $\mathbf{p}_1$ con precisione infinita (ciò è possibile, anche se poi la posizione di 1 avrà un'indeterminazione infinita), si ottiene la quantità di moto di 1:

$$m_2 \mathbf{V}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_1$$

cioè la quantità di moto della particella 2, *senza perturbarla.* Quindi, secondo EPR, tale quantità di moto è un «elemento di realtà». In maniera analoga, misurando con precisione assoluta l'ascissa x_1 della particella 1, otteniamo con altrettanta precisione e simultaneamente alla misura della quantità di moto, l'ascissa della particella 2:

$$x_2 = x_1 - x \tag{4}$$

Ne segue che anche la posizione della particella 2 è un «elemento di realtà». D'altro canto, la meccanica quantistica impedendo la conoscenza simultanea di x e p , rende incompleta la teoria giacché alle predette grandezze fisiche non corrisponde alcun elemento di realtà.

Conclusione: *la descrizione quanto-meccanica della realtà fisica è incompleta.* Per EPR la possibilità di poter determinare le grandezze relative alla particella 2 senza compiere alcuna misura su di essa, implica l'esistenza di tali grandezze indipendentemente dall'osservatore.

2 Il principio di località di Einstein

Per quanto visto nel numero precedente l'impossibilità di applicare il principio di indeterminazione di Heisenberg al centro di massa del sistema costituito dalle due particelle, consente di determinare simultaneamente la quantità di moto totale $\mathbf{p}$ del sistema (ricordiamo che tale grandezza si identifica con la quantità di moto del centro di massa quando si attribuisce a tale punto la massa totale del sistema) e la posizione relativa $x = x_1 - x_2$ delle due particelle. Quindi misurando la quantità di moto della particella 1, si perviene automaticamente alla conoscenza della quantità di moto della particella 2. Similmente per ciò che riguarda la posizione della medesima particella.

Tuttavia, per i sostenitori dell'interpretazione di Copenaghen, posizione e quantità di moto della particella 2 sono intrinsecamente legate al procedimento di misura condotto sulla particella 1. Dal momento che tali particelle hanno interagito nel passato per un intervallo di tempo τ (durata dell'urto) per poi allontanarsi, ne segue che in linea di principio, tali particelle possono essere distanti anni-luce nell'istante in cui viene misurata la quantità di moto della particella 1. Un possibile legame tra il predetto procedimento di misura e lo stato meccanico (x, p) della particella 2, implica l'esistenza di una "spettrale" azione a distanza, che per EPR è manifestamente inaccettabile giacché una qualunque interazione non può propagarsi a velocità maggiore della velocità della luce. Ciò è espresso dal seguente principio:

Principio 3 *(***Principio di località di Einstein***)*
La reale situazione fattuale del sistema S_2 è indipendente da quanto accade al sistema S_1, quando esso è spazialmente separato dal primo.

Qui ci si riferisce ai sistemi S_1 e S_2 ovvero alle particelle 1 e 2, rispettivamente.

Tale principio è la base del *localismo*. Si noti che tale locuzione richiede necessariamente la nozione di *separabilità*. Incidentalmente, per confutare le ipotesi di EPR, i sostenitori dell'interpretazione di Copenaghen, invocarono la circostanza secondo cui l'interazone tra le particelle 1 e 2 ha reso *non-separabili* tali sistemi. Per essere più precisi, le predette particelle compongono un unico sistema S per cui anche se 1 e 2 si trovano ad anni luce di distanza, una misura eseguita su una delle due particelle, avrà un effetto istantaneo sull'altra.

3 Non separabilità. Entanglement quantistico

L'operatore hamiltoniano del sistema composito $\{1, 2\}$, negli istanti successivi all'urto, è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_1^2}{2m_2} \tag{5}$$

Qui stiamo considerando particelle *non* identiche e prive di spin. Le autofunzioni dell'impulso (quantità di moto) di singola particella sono

$$u_{p_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_1 x_1}, \quad u_{p_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_2 x_2} \tag{6}$$

Le singole particelle possono essere descritte attraverso la propagazione di un pacchetto d'onde, per cui con ovvio significato dei simboli:

$$\psi^{(j)}(x_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} c^{(j)}(p_j)\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_j x_j - E_j t)} dp_j, \tag{7}$$

dove l'indice j etichetta la particella, mentre l'autovalore dell'energia è $E_j = \frac{p_j^2}{2m_j}$, e la funzione d'onda nello spazio degli impulsi (trasformata di Fourier):

$$c^{(j)}(p_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(j)}(x_1, 0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}p_j x_j} dx_j \tag{8}$$

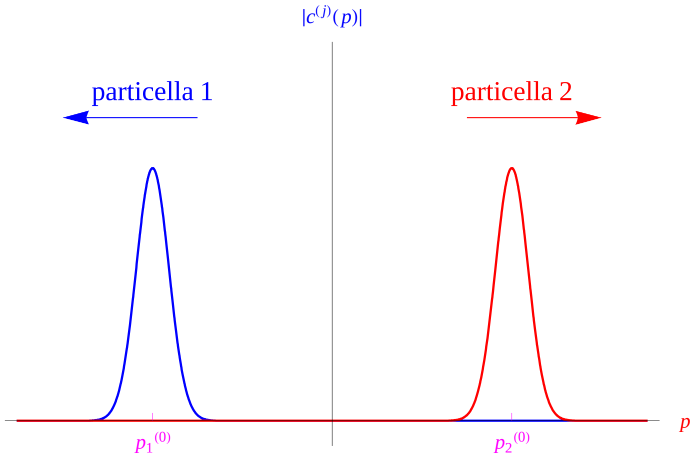


Figura 2: Propagazione dei pacchetti d'onda che descrivono le singole particelle, dopo che hanno interagito.

Siccome stiamo considerando pacchetti d'onda, si ha che $\left|c^{(j)}(p_j)\right|$ è apprezzabilmente diverso da zero solo in un intorno sufficientemente piccolo di $p_j^{(0)}$ (fig. 2).

La funzione d'onda del sistema è

$$\psi(x_1, x_2, t) = \psi^{(1)}(x_1, t)\, \psi^{(2)}(x_1, t) \tag{9}$$

Ne segue che se nell'istante t_{mis} eseguiamo una misura dell'impulso della particella 1, la sua funzione d'onda $\psi^{(1)}$ collassa nell'autofunzione $u_{p_1^{(0)}}$ i.e. con autovalore $p_1^{(0)}$. Per il principio di conservazione della quantità di moto, si ha che la funzione d'onda $\psi^{(2)}$ della particella 2 collassa nell'autofunzione $u_{p_2^{(0)}}$ i.e. con autovalore $p_1^{(0)}$. In simboli:

$$\psi(x_1, x_2, t_{mis}) \underset{\text{mis } p_1}{\longrightarrow} u_{p_1^{(0)}}(x_1)\, u_{p_2^{(0)}}(x_2) \tag{10}$$